MATHEMATICS

HINREICHENDE BEDINGUNGEN FÜR ANALYTISCHE, HARMONISCHE UND SUBHARMONISCHE FUNKTIONEN. VII

VON

L. R. J. WESTERMANN

(Communicated by Prof. J. RIDDER at the meeting of September 29, 1962)

Nach Erweiterung von Satz D folgen die Anwendungen. Man beachte die Analogie zwischen den Teilen V und VII.

§ 31. (Verallgemeinerter) Satz D*. *Die Annahmen über Bereich B, Rand C und $x0y$ seien wie in Satz D.* $\vec{V}_l(x, y) \equiv (P^{(l)}(x, y), Q^{(l)}(x, y))$ *und der adjungierte Vektor* $\vec{\mathfrak{V}}_l(x, y) \equiv (\mathfrak{P}^{(l)}(x, y), \mathfrak{Q}^{(l)}(x, y))$ *oder* $(Q)^{l)}(x, y), -P^{(l)}(x, y))$ *werden in* $\bar{B}$, *für* $l = 1, 2, \ldots, l_0$, *die gleichen Eigenschaften wie* $\vec{V}$, $\vec{\mathfrak{V}}$ *in Satz D haben.*

Vorausgesetzt wird:

1° *in jedem Punkte* $(\bar{x}, \bar{y}) \in B - E_l$, *wobei* E_l *abzählbare Teilmenge von* B, *hat* $\vec{\mathfrak{V}}_l(x, y)$ *die Eigenschaft* K [69]) $(l = 1, 2, \ldots, l_0)$;

2° *zu fast allen Punkten* $(x, y) \in B - E$, *wobei* $E = \sum_{l=1}^{l_0} E_l$, *gibt es Punktfolgen* $\mathfrak{F}[\alpha^{(l)}(x, y)]$ *und* $\mathfrak{F}[\beta^{(l)}(x, y)]$ *und zugehörige endliche partielle Ableitungen* $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(l)}(x,y)]}\, \mathfrak{P}^{(l)}$, $D_{\mathfrak{F}[\beta^{(l)}(x,y)]}\, \mathfrak{P}^{(l)}$, $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(l)}(x,y)]}\, \mathfrak{Q}^{(l)}$ *und* $D_{\mathfrak{F}[\beta^{(l)}(x,y)]}\, \mathfrak{Q}^{(l)}$ $(0 \leqq \alpha^{(l)} < 2\pi,\ 0 < \beta^{(l)} - \alpha^{(l)} < \pi)$, *und daneben in* B *Lebesgue-integrierbare Funktionen* $f^{(l)}(x, y)$ *derart daß in fast allen Punkten* (x, y) *von* B *gilt:*

$$
(93)\quad \left\{ \begin{aligned} & f^{(l)}(x,y) \leqq \text{die Komponente von } \vec{\mathfrak{W}}_1{}^{(l)}(x, y) \text{ parallel zur } \alpha^{(l)}(x, y)\text{-Achse} \\ & \qquad + \text{die Komponente von } \vec{\mathfrak{W}}_2{}^{(l)}(x, y) \text{ parallel zur } \beta^{(l)}(x, y)\text{-Achse}; \end{aligned} \right.
$$

dabei hat der Vektor $\vec{\mathfrak{W}}_1{}^{(l)}(x, y)$ *die Komponenten* $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(l)}(x,y)]}\, \mathfrak{P}^{(l)}$ *und* $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(l)}(x,y)]}\, \mathfrak{Q}^{(l)}$, *und der Vektor* $\vec{\mathfrak{W}}_2{}^{(l)}(x, y)$ *die Komponenten* $D_{\mathfrak{F}[\beta^{(l)}(x,y)]}\, \mathfrak{P}^{(l)}$ *und* $D_{\mathfrak{F}[\beta^{(l)}(x,y)]}\, \mathfrak{Q}^{(l)}$, *parallel zur x- bzw. parallel zur y-Achse* $(l = 1, 2, \ldots, l_0)$ [70]);

---

69) Zu einem solchen Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ und jedem $l = 1, 2, \ldots, l_0$ gibt es wenigstens drei Punktfolgen $\mathfrak{F}[\alpha_j{}^{(l)}(\bar{x}, \bar{y})]$ $(j = 1, 2, 3)$ mit ungleichen $\alpha_j{}^{(l)}$ (vergleiche die Definition in § 27) und zugehörigen endlichen partiellen Ableitungen

$$D_{\mathfrak{F}[\alpha_j{}^{(l)}(\bar{x},\bar{y})]}\, \mathfrak{P}^{(l)} \text{ und } D_{\mathfrak{F}[\alpha_j{}^{(l)}(\bar{x},\bar{y})]}\, \mathfrak{Q}^{(l)}.$$

70) Die Bemerkungen von Fußn. 63 über f, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ lassen sich hier übertragen auf $f^{(l)}$, $\mathfrak{P}^{(l)}$ und $\mathfrak{Q}^{(l)}(l = 1, 2, \ldots, l_0)$.

3° *ist* O_l *die (offene) Teilmenge von* B, *deren jeder Punkt* (x, y) *eine in* B *liegende Umgebung* $\Omega_l(x, y)$ *hat, mit*

$\iint_{\bar{I}} f^{(l)}(x, y)d\sigma \leqq \int_{R(I)} P^{(l)}dx + Q^{(l)}dy$, *bei jedem Segment* $\bar{I} \subset \Omega_l(x,y)$, $R(I)$ *positiv orientiert,*

und $O = O_1 \cdot O_2 \cdot \ldots \cdot O_{l_0}$, *so nimmt, bei jedem Punkt* $(x_0, y_0) \in B - O$, *die in* x *und* y *stetige Funktion* $\dfrac{|\vec{\mathfrak{B}}_l(x, y) - \vec{\mathfrak{B}}_l(x_0, y_0)|}{\delta(x, y; x_0, y_0)}$ *in jedem k-fach zusammenhängenden, abgeschlossenen Teilbereich* $\bar{D}$ *von* O *ihren Maximalwert in einem Randpunkt von* D *an* $(k = 1, 2, \ldots; l = 1, 2, \ldots, l_0)$.

Nun ist:

$$\iint_B f^{(l)}(x, y)d\sigma \leqq \int_C P^{(l)}dx + Q^{(l)}dy \quad (l = 1, 2, \ldots, l_0).$$

Satz D^* folgt unmittelbar mit dem allgemeinen Theorem (II, § 8) und folgender Erweiterung des Hilfssatzes 10.

(Verallgemeinerter) Hilfssatz 10*. Unter den Bedingungen von Satz D^* ist für jedes in B liegende Segment $\bar{I}$, mit positiv orientiertem Rand $R(I)$,

$$\iint_{\bar{I}} f^{(l)}(x, y)d\sigma \leqq \int_{R(I)} P^{(l)}dx + Q^{(l)}dy \quad (l = 1, 2, \ldots, l_0).$$

Beweis. Dieser folgt die gleichen Hauptlinien wie der des Hilfssatzes 10.

Setzen wir voraus, daß es unter den Bedingungen von Satz D^* für ein Segment $\bar{I} \subset B$ ein l gibt mit $1 \leqq l \leqq l_0$ und

$$\iint_{\bar{I}} f^{(l)}(x, y)d\sigma > \int_{R(I)} P^{(l)}dx + Q^{(l)}dy. \tag{94}$$

Dann ist die Menge S der Punkte von B, in deren jeder Umgebung Segmente liegen, für die eine Ungleichung (94) gilt, nicht leer; S ist perfekt in B. $\bar{U}$ sei ein Segment in B, das im Innern Punkte von S enthält; nun sei $F \equiv \overline{(U \cdot S)}$.

Lemma 1 (§ 26) läßt sich in $\bar{B}$ auf $\vec{\mathfrak{B}}_1(x, y)$ und F mit $E = \sum\limits_{l=1} E_l$ [71] anwenden. Dann folgt die Existenz eines Systems $T(\Pi^{(1)}; m_0^{(1)}, n_0^{(1)})$, wobei $\Pi^{(1)}$ ein Stück von F, mit $\Pi^{(1)} = \overline{(u^{(1)} \cdot F)}$, Segment $\bar{u}^{(1)} \subset B$ (und Diameter von $\bar{u}^{(1)} < 1/2m_0^{(1)} \cdot \sin 2/m_0^{(1)}$), und der zu $(m_0^{(1)}, n_0^{(1)})$ korrespondierenden Menge $F_{m_0^{(1)}, n_0^{(1)}} \subset \Pi^{(1)}$ [72]).

Erneute Anwendung des Lemmas, nun auf $\vec{\mathfrak{B}}_2(x, y)$ und $\Pi^{(1)}$ mit E, liefert ein System $T(\Pi^{(2)}; m_0^{(2)}, n_0^{(2)})$, wobei $\Pi^{(2)}$ ein Stück von $\Pi^{(1)}$, mit $\Pi^{(2)} = \overline{(u^{(2)} \cdot \Pi^{(1)})}$, Segment $\bar{u}^{(2)} \subset B$ (und Diameter von $\bar{u}^{(2)} < 1/2m_0^{(2)} \cdot \sin 2/m_0^{(2)}$), und der zu $(m_0^{(2)}, n_0^{(2)})$ korrespondierenden Menge $F_{m_0^{(2)}, n_0^{(2)}} \subset \subset \Pi^{(2)}$ [72]).

---

[71]) Die Menge E ist abzählbar, somit jeder ihrer Punkte als in B abgeschlossene Menge aufzufassen.

[72]) Siehe die Definition von $T(\Pi; m, n)$ in § 26.

So fortfahrend erhält man nach l_0 Schritten ein System $T(\Pi^{(l_0)};\, m_0^{(l_0)}, n_0^{(l_0)})$, wobei $\Pi^{(l_0)}$ ein Stück von F, mit $\Pi^{(l_0)} = \overline{(u^{(l_0)}\cdot \Pi^{(l_0-1)})} \subset U$, und der zu $(m_0{}^{(l_0)}, n_0{}^{(l_0)})$ korrespondierenden Menge $F_{m_0{}^{(l_0)}, n_0{}^{(l_0)}} \subset \Pi^{(l_0)}$ [72]).

Von nun an können wir für jeden der Vektoren $\overrightarrow{\mathfrak{V}}_l$ mit zugehörigem $f^{(l)}$ $(l=1, 2, \ldots, l_0)$ und $\Pi^{(l_0)}$ die Betrachtungen von §§ 28 bis 30 für $\overrightarrow{\mathfrak{V}}$ mit f und Π wiederholen. Daraus folgt sodann die Existenz eines Punkte von F enthaltenden Teilbereiches von B, in welchem für jedes Segment $\bar{I}$ gilt:

$$\int\!\!\int_{\bar{I}} f^{(l)} d\sigma \leqq \int_{B(I)} P^{(l)} dx + Q^{(l)} dy \text{ mit } 1 \leqq l \leqq l_0.$$

Wir gelangen zu einem Widerspruch.

§ 32. Folgerungen aus den Sätzen D und D^*.

Folgerung 1. Der Bereich B mit Rand C und $x0y$ seien wie in Satz D und Satz D^*; *$f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ sei stetig in $\bar{B}$. Vorausgesetzt wird:*

1° *in jedem Punkte $(\bar{x}, \bar{y}) \in B - E$, wobei E eine abzählbare Teilmenge von B, haben die Vektoren $\overrightarrow{\mathfrak{V}}_1(x, y) \equiv \{\mathfrak{P}^{(1)}(x, y) = -v(x, y),\ \mathfrak{Q}^{(1)}(x, y) = -u(x, y)\}$ und $\overrightarrow{\mathfrak{V}}_2(x, y) \equiv \{\mathfrak{P}^{(2)}(x, y) = u(x, y),\ \mathfrak{Q}^{(2)}(x, y) = -v(x, y)\}$ die Eigenschaft K* [73]);

2° *zu fast allen Punkten $(x, y) \in B$ gibt es Punktfolgen $\mathfrak{F}[\alpha^{(l)}(x, y)]$ und $\mathfrak{F}[\beta^{(l)}(x, y)]$ $(0 \leqq \alpha^{(l)}(x, y) < 2\pi;\ 0 < \beta^{(l)}(x, y) - \alpha^{(l)}(x, y) < \pi;\ l = 1, 2)$ und zugehörige endliche partielle Ableitungen $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(l)}(x,y)]}\,\mathfrak{P}^{(l)}(x, y)$,*

$D_{\mathfrak{F}[\beta^{(l)}(x,y)]}\,\mathfrak{P}^{(l)}(x, y)$, $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(l)}(x,y)]}\,\mathfrak{Q}^{(l)}(x, y)$, $D_{\mathfrak{F}[\beta^{(l)}(x,y)]}\,\mathfrak{Q}^{(l)}(x, y)$ $\quad (l=1, 2)$

mit den folgenden Eigenschaften: von den Vektoren

$\overrightarrow{\mathfrak{W}}_1{}^{(1)}(x,y)$ *mit Komponenten* $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(1)}]}\,\mathfrak{P}^{(1)}$, $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(1)}]}\,\mathfrak{Q}^{(1)}$ *parallel zur x-bzw. y-Achse,*
$\overrightarrow{\mathfrak{W}}_1{}^{(2)}(x,y)$,, ,, $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(2)}]}\,\mathfrak{P}^{(2)}$, $D_{\mathfrak{F}[\alpha^{(2)}]}\,\mathfrak{Q}^{(2)}$,, ,, *x-bzw. y-* ,, ,
$\overrightarrow{\mathfrak{W}}_2{}^{(1)}(x,y)$,, ,, $D_{\mathfrak{F}[\beta^{(1)}]}\,\mathfrak{P}^{(1)}$, $D_{\mathfrak{F}[\beta^{(1)}]}\,\mathfrak{Q}^{(1)}$,, ,, *x-bzw. y-* ,, ,
$\overrightarrow{\mathfrak{W}}_2{}^{(2)}(x,y)$,, ,, $D_{\mathfrak{F}[\beta^{(2)}]}\,\mathfrak{P}^{(2)}$, $D_{\mathfrak{F}[\beta^{(2)}]}\,\mathfrak{Q}^{(2)}$,, ,, *x-bzw. y-* ,, ,

ist für die Komponenten parallel zu den Richtungen $\alpha^{(l)}(x, y)$ und $\beta^{(l)}(x, y)$:

$$(95)\quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \text{die } \alpha^{(l)}(x, y)\text{-Komponente von } \overrightarrow{\mathfrak{W}}_1{}^{(l)}(x, y) + \text{die } \beta^{(l)}(x, y)\text{-Kompo-} \\ \qquad\qquad \text{nente von } \overrightarrow{\mathfrak{W}}_2{}^{(l)}(x, y)\ (l=1 \text{ oder } =2) \end{array} \right.$$ [74]).

---

[73]) Dies läßt sich auch so ausdrücken: In einem solchen Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ enden drei Jordanbögen $J_j(\bar{x}, \bar{y})$, deren jeder in einem von drei abgeschlossenen Kreissektoren verläuft, mit Mittelpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ und paarweise fremd bis auf den Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$, und mit $\limsup\limits_{z \to z_0;\, z \in J_j} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$ endlich. — Hat $\overrightarrow{\mathfrak{V}}_1(x, y)$ in einem Punkte (x, y) die Eigenschaft K, so auch $\overrightarrow{\mathfrak{V}}_2(x, y)$, und umgekehrt.

[74]) Vergleiche (79) und (79^{bis}).

Nun ist

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

und $f(z)$ analytisch in B.

Beweis. O_1, O_2, O_3 und O_4 seien die offenen Teilmengen von B mit folgender Eigenschaft: jeder Punkt (x, y) einer Menge O_j hat eine in B liegende Umgebung $\Omega_j(x, y)$ derart, daß für jedes Segment $\bar{I} \subset \Omega_j(x, y)$ die j^{te} hier folgende Ungleichheitsrelation gilt:

$$(96)\quad \begin{cases} 0 \leqq \int_{R(I)} udx - vdy;\ 0 \leqq \int_{R(I)} -udx + vdy;\ 0 \leqq \int_{R(I)} vdx + udy; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqq \int_{R(I)} -vdx - udy. \end{cases}$$

Daraus folgt für jeden Punkt der offenen Menge $O = O_1 \cdot O_2 \cdot O_3 \cdot O_4$, daß die Segmente $\bar{I}$ in einer willkürlichen Umgebung $\subset O$ des Punktes die Relation

$$\int_{R(I)} f(z)dz = \int_{R(I)} udx - vdy + i \int_{R(I)} vdx + udy = 0$$

erfüllen, wodurch $f(z)$ analytisch ist in O.

Wir werden Satz D^* anwenden mit $l_0 = 4$; die vier zugehörigen adjungierten Vektoren seien hier $\vec{\mathfrak{B}}_1(x, y) \equiv \{-v(x, y), -u(x, y)\}$, $-\vec{\mathfrak{B}}_1(x, y) \equiv \equiv \{v(x, y), u(x, y)\}$, $\vec{\mathfrak{B}}_2(x, y) \equiv \{u(x, y), -v(x, y)\}$ und $-\vec{\mathfrak{B}}_2(x, y) \equiv \equiv \{-u(x, y), v(x, y)\}$ (siehe 1° in Folgerung 1), daneben $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E$ und $f^{(1)} = f^{(2)} = f^{(3)} = f^{(4)} = 0$ in B. Die Bedungungen 1° und 2° von Satz D^* folgen nun für diesen Fall aus den Bedingungen 1° und 2° von Folgerung 1.

Die unter Bedingung 3° von Satz D^* vorkommenden Ungleichungen fallen in dem hier betrachteten Spezialfall mit den Ungleichungen (96) zusammen. Diese Bedingung ist dadurch auch hier erfüllt; denn bei $O = O_1 \cdot O_2 \cdot O_3 \cdot O_4$ wie im ersten Absatz dieses Beweises ist für die Vektoren $\vec{\mathfrak{B}}_1(x, y) \equiv \{-v, -u\}$ und $\vec{\mathfrak{B}}_2(x, y) \equiv \{u, -v\}$, und bei z_0 oder $(x_0, y_0) \in B - O$:

$$\frac{|\vec{\mathfrak{B}}_j(x, y) - \vec{\mathfrak{B}}_j(x_0, y_0)|}{\delta(x, y; x_0, y_0)} = \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \quad (j = 1, 2),$$

während $\left|\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right|$, wegen der Analytizität von $f(z)$ in O, in jedem k-fach zusammenhängenden abgeschlossenen Teilbereich von O ihren Maximalwert auf dem Rande annimt.

Satz D^* liefert das gesuchte Resultat.

Spezialfall 1^a. Der Bereich B mit Rand C und $x0y$ seien wie in Satz D und Satz D^*; *$f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y)$ sei stetig in $\bar{B}$. Vorausgesetzt wird:*

1° *in jedem Punkte $\bar{z} \equiv (\bar{x}, \bar{y}) \in B - E$, wobei E eine abzählbare Teilmenge von B, enden drei Jordanbögen $J_j(\bar{x}, \bar{y})$, deren jeder in einem von drei abgeschlossenen Kreissektoren verläuft, mit Mittelpunkt $\bar{z}$ und paarweise fremd bis auf den Punkt $\bar{z}$, und mit $\limsup\limits_{z \to \bar{z};\, z \in J_j} \left|\dfrac{f(z) - f(\bar{z})}{z - \bar{z}}\right|$ endlich;*

2° *zu fast allen Punkten* $z \equiv (x, y) \in B$ *gibt es Punktfolgen* $\mathfrak{F}[\alpha(x, y)]$ *und* $\mathfrak{F}[\beta(x, y)]$ $(0 \leqq \alpha(x, y) < 2\pi;\ 0 < \beta(x, y) - \alpha(x, y) < \pi)$, *und zugehörige endliche partielle Ableitungen* $D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}(u+iv)$, $D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}(u+iv)$, *mit*

$$(97) \qquad e^{-i\alpha(x,y)} \cdot D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}(u+iv) = e^{-i\beta(x,y)} \cdot D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}(u+iv)$$

in diesen Punkten, d.h. in fast allen Punkten $z \equiv (x, y)$ *von* B *ist die Ableitung von* $f(z)$ *längs zwei nach* z *konvergierenden Punktfolgen* $\mathfrak{F}[\alpha(x, y)]$ *und* $\mathfrak{F}[\beta(x, y)]$ *dieselbe* [75]).

Dann ist $f(z)$ *analytisch in* B, *mit* $\int_C f(z)dz = 0$.

Beweis. Vergleichung von (95), (79) und (79^{bis}) zeigt, daß bei den hier unter 2° angegebenen Punktfolgen $\mathfrak{F}[\alpha(x, y)]$, $\mathfrak{F}[\beta(x, y)]$ und den Vektoren

$\vec{\mathfrak{W}}_1^{(l)}(x, y)$ mit Komponenten $D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}\,\mathfrak{P}^{(l)}$, $D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}\,\mathfrak{Q}^{(l)}$ parallel zur x-bzw. y-Achse,

und

$\vec{\mathfrak{W}}_2^{(l)}(x, y)$ mit Komponenten $D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}\,\mathfrak{P}^{(l)}$, $D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}\,\mathfrak{Q}^{(l)}$ parallel zur x-bzw. y-Achse ($\mathfrak{P}^{(l)}$, $\mathfrak{Q}^{(l)}$ wie in Folgerung 1, 1°; $l = 1, 2$)

in fast allen Punkten von B:

$$\text{die } \alpha(x, y)\text{-Komponente von } \vec{\mathfrak{W}}_1^{(l)}(x, y) + \text{die } \beta(x, y)\text{-Komponente von } \vec{\mathfrak{W}}_2^{(l)}(x, y) = \frac{1}{\sin[\beta(x, y) - \alpha(x, y)]} \cdot \{[D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}\,\mathfrak{P}^{(l)}(x, y) \cdot \sin\beta(x, y) - D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}\,\mathfrak{Q}^{(l)}(x, y) \cdot \cos\beta(x, y)] + [-D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}\,\mathfrak{P}^{(l)}(x, y) \cdot \sin\alpha(x, y) + D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}\,\mathfrak{Q}^{(l)}(x, y) \cdot \cos\alpha(x, y)]\},$$

somit

$$\text{die } \alpha(x, y)\text{-Komponente von } \vec{\mathfrak{W}}_1^{(1)}(x, y) + \text{die } \beta(x, y)\text{-Komponente von } \vec{\mathfrak{W}}_2^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\sin[\beta(x, y) - \alpha(x, y)]} \cdot \Re\{[e^{i\beta} D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}(u+iv) - e^{i\alpha} D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}(u+iv)]\},$$

und

$$\text{die } \alpha(x, y)\text{-Komponente von } \vec{\mathfrak{W}}_1^{(2)}(x, y) + \text{die } \beta(x, y)\text{-Komponente von } \vec{\mathfrak{W}}_2^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\sin[\beta(x, y) - \alpha(x, y)]} \cdot \Im\{[e^{i\beta} D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}(u+iv) - e^{i\alpha} D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}(u+iv)]\}$$

ist.

---

[75]) Denn (97) ist aequivalent mit $\lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{f(z_i) - f(z)}{z_i - z} = \lim\limits_{j \to \infty} \dfrac{f(z_j) - f(z)}{z_j - z}$ bei $\mathfrak{F}[\alpha(x, y)] \equiv$ die Punktfolge $\{z_i\}$, $\mathfrak{F}[\beta(x, y)] \equiv$ die Punktfolge $\{z_j\}$. Siehe die Definition in § 27 (Anfang).

Also sind in fast allen Punkten von B die Relationen (97) und

die $\alpha(x, y)$-Komponente von $\vec{\mathfrak{W}}_1^{(l)}(x, y)$ + die $\beta(x, y)$-Komponente von $\vec{\mathfrak{W}}_2^{(l)}(x, y) = 0 (l = 1, 2)$

aequivalent, womit Spezialfall 1^a aus Folgerung 1 hervorgeht.

Weitere Spezialisierung von 1^a liefert

Spezialfall 1^b (Satz von K. E. MEIER). Ist $f(z)$ stetig im Gebiet B, und enden in jedem Punkte $\bar{z} \in B - E$, wobei E eine abzählbare Teilmenge von B, drei Jordanbögen $J_j(\bar{z})$, deren jeder in einem von drei abgeschlossenen Kreissektoren verläuft, mit Mittelpunkt $\bar{z}$ und paarweise fremd bis auf den Punkt $\bar{z}$, und mit gleichen endlichen Grenzwerten $\lim\limits_{z \to \bar{z};\, z \in J_j(\bar{z})} \frac{f(z) - f(\bar{z})}{z - \bar{z}}$, so ist $f(z)$ analytisch in B [76]).

Folgerung 2. Der Bereich B mit Rand C, und $x0y$ seien wie in den Sätzen D und D^*; *$u(x, y)$ sei eine in B nach x und nach y stetig differenzierbare Funktion, wobei $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ auf C Grenzwerte haben sollen. Vorausgesetzt wird*:

1° *in $B - E$, wobei E abzählbar, hat der Vektor $\vec{\mathfrak{V}} \equiv \left(-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ die Eigenschaft K; es gibt dadurch insbes. zu jedem Punkt $(x, y) \in B - E$ Punktfolgen $\mathfrak{F}[\alpha(x, y)]$ und $\mathfrak{F}[\beta(x, y)]$ mit $0 \leqq \alpha < 2\pi$, $0 < \beta - \alpha < \pi$ und zugehörigen endlichen partiellen Ableitungen*

$$D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \text{ und } D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

2° *es soll möglich sein in fast allen Punkten von B die Punktfolgen $\mathfrak{F}[\alpha(x, y)]$ und $\mathfrak{F}[\beta(x, y)]$ derartig zu wählen, daß für das Achsensystem $\alpha(x, y)0\beta(x, y)$:*

$$(98)\quad \left\{\begin{array}{r}\text{die } \alpha(x, y)\text{-Komponente von } \vec{\mathfrak{W}}_1(x, y) + \text{die } \beta(x, y)\text{-Komponente} \\ \text{von } \vec{\mathfrak{W}}_2(x, y) = 0\end{array}\right.$$

ist; dabei sind die Komponenten in bezug auf $x0y$ von $\vec{\mathfrak{W}}_1(x, y)$ $D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ und $D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, und die von $\vec{\mathfrak{W}}_2(x, y)$ $D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ und $D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

---

[76]) Siehe [19], S. 183 (Satz 2), 187–195. Es ist deutlich, daß man sich beschränken darf auf Endlichkeit der drei Grenzwerte in allen Punkten von B–E, und Gleichheit in fast allen Punkten von B. — Für eine andersartige Anwendung von Punktfolgen bei hinreichenden Bedingungen für Analytizität als hier in Folgerung 1 siehe [20], S. 67–70.

Nun ist

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = 0,$$

und $u(x, y)$ *harmonisch in* B.

Beweis. Wir wenden Satz D^* an mit $l_0 = 2$, $\vec{\mathfrak{B}}_1 \equiv \left(-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ oder $\vec{\mathfrak{B}}$, $\vec{\mathfrak{B}}_2 \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $E_1 = E_2 = E$ und $f^{(1)} = f^{(2)} = 0$ in B. $\vec{\mathfrak{W}}_1^{(1)}(x, y) \equiv \vec{\mathfrak{W}}_1(x, y)$ und $\vec{\mathfrak{W}}_1^{(2)}(x, y)$ sind entgegengesetzt und von gleicher Länge. O_1 und O_2 sind die (offenen) Teilmengen von B, deren jeder Punkt (x, y) eine in B liegende Umgebung $\Omega_1(x, y)$ bzw. $\Omega_2(x, y)$ hat mit

$$0 = \iint_{\bar I} f^{(1)}(x, y) d\sigma \leqq \int_{R(I)} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

$$\text{bzw. } 0 = \iint_{\bar I} f^{(2)}(x, y) d\sigma \leqq \int_{R(I)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

für jedes $\bar I \subset \Omega_1(x, y)$ bzw. $\subset \Omega_2(x, y)$. In $O = O_1 \cdot O_2$ ist $u(x, y)$ dadurch harmonisch, und die Funktion $f(x+iy) \equiv \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i\,\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ analytisch, wodurch

$$\frac{|\vec{\mathfrak{B}}_j(x, y) - \vec{\mathfrak{B}}_j(x_0, y_0)|}{\delta(x, y; x_0, y_0)} = \left|\frac{f(x+iy) - f(x_0+iy_0)}{(x-x_0) + i(y-y_0)}\right| \quad (j = 1, 2)$$

in jedem k-fach zusammenhängenden abgeschlossenen Teilbereich $\bar D$ von O, für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in B - O$, ihren Maximalwert in einem Punkte von $\bar D - D$ annimt ($k = 1, 2, \ldots$).

Nach Satz D^* ist nun

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \leqq \text{und} \geqq 0;$$

dabei $u(x, y)$ harmonisch in B.

Spezialfall 2^a. Werden in Folgerung 2 unter 2° *die* $\alpha(x, y)$- *und* $\beta(x, y)$-*Richtungen in fast jedem Punkte* $(x, y) \in B$ *als orthogonal angenommen, und haben* $X_{\alpha(x,y)}$- *und* $Y_{\beta(x,y)}$-*Achse diese Richtungen, so ist für derartige Punkte die Bedingung* (98) *aequivalent mit*

$$-D_{\mathfrak{F}[\alpha(x,y)]}\left(\frac{\partial u}{\partial X_\alpha}\right) - D_{\mathfrak{F}[\beta(x,y)]}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_\beta}\right) = 0.$$

Beweis. Denn mit (79), (79^{bis}) folgt, daß (98) sich schreiben läßt:

$$\left[D_{\mathfrak{F}(\alpha)}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \sin\beta - D_{\mathfrak{F}(\alpha)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \cos\beta\right]$$
$$+ \left[-D_{\mathfrak{F}(\beta)}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \sin\alpha + D_{\mathfrak{F}(\beta)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \cos\alpha\right] = 0,$$

oder

$$-D_{\mathfrak{F}(\alpha)}\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\alpha\right] - D_{\mathfrak{F}(\beta)}\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\beta\right] = 0,$$

oder, da $u(x, y)$ stetige partielle Ableitungen hat und somit total-differenzierbar ist, mit Teil I, § 1, (6c) und (6d),

$$-D_{\mathfrak{F}(\alpha)}\left(\frac{\partial u}{\partial X_\alpha}\right) - D_{\mathfrak{F}(\beta)}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_\beta}\right) = 0.$$

Folgerung 3. Die Bedungungen sind dieselben wie in Folgerung 2 bis auf zwei Ausnahmen: 1° *in* (98) *ersetze man* $=$ *durch* $\leqq$; 2° *die Funktion* $\dfrac{|\vec{\mathfrak{V}}(x, y) - \vec{\mathfrak{V}}(x_0, y_0)|}{\delta(x, y; x_0, y_0)}$ *nimmt in jedem k-fach zusammenhängenden abgeschlossenen Teilbereich* $\bar{H}$ *von* B $(k = 1, 2, \ldots)$, *für jeden Punkt* $(x_0, y_0) \in \in B - \bar{H}$, *ihren Maximalwert auf dem Rande* $\bar{H} - H$ *an.*

Nun ist

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \leqq 0, \tag{99}$$

und $u(x, y)$ *subharmonisch in* B.

Beweis. Man wende Satz D an mit $\vec{\mathfrak{V}}(x, y) \equiv \left(-\dfrac{\partial u}{\partial x}, -\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ und $f(x, y) \equiv 0$ in B. Daraus folgt (99) und eine analoge Ungleichheit für jedes Segment $\bar{I} \subset B$. Nach einem Satze von Saks [8]) ist u nun auch subharmonisch in B.

Spezialfall 3[a]. Werden in Folgerung 3 (analog wie in Spezialfall 2[a]) *die* $\alpha(x, y)$- *und* $\beta(x, y)$-*Richtungen in fast jedem Punkte* $(x, y) \in B$ *orthogonal angenommen,* und *haben* $X_{\alpha(x,y)}$- *und* $Y_{\beta(x,y)}$-*Achse diese Richtungen,* so ist *für derartige Punkte die Bedingung* (98) *mit* $\leqq$ *anstatt* $=$ *aequivalent mit*

$$-D_{\mathfrak{F}(\alpha)}\left(\frac{\partial u}{\partial X_\alpha}\right) - D_{\mathfrak{F}(\beta)}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_\beta}\right) \leqq 0.$$

Man vergleiche die Folgerungen 1, 1[a], 1[b], 2, 2[a], 3, 3[a] aus den Sätzen D und D^* mit den korrespondierenden Folgerungen 1, 1[a], 2, 2[a], 3, 3[a] aus den Sätzen C und C^* (V, § 22).

§ 33. Auch hier führt Anwendung des Satzes von Besicovitch–Saks–Zygmund zu Erweiterungen.

Satz D^{bis}. *Satz D behält seine Gültigkeit unter den beiden Annahmen:* α. *die Funktion* $f(x, y)$ *ist in* B *(Lebesgue-integrierbar und) nach unten beschränkt bei Vernachlässigung einer Teilmenge vom Maß Null;* β. *die Ausnahmemenge* E *ist allgemein eine Summe* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} E^{(p)}$ *mit jeder Menge* $E^{(p)}$ *von endlichem linearen Maß und abgeschlossen in* B.

Das folgt mit dem allgemeinen Theorem mit Bemerkung (II, § 8) und dem

Hilfssatz 10^{bis}: Unter den gleichen Änderungen, welche aus Satz D zu Satz D^{bis} führten, behält auch Hilfssatz 10 (§ 27) seine Gültigkeit.

Beweis. Wie beim Beweise von Hilfssatz 10 setzen wir, unter den Bedingungen von Satz D^{bis}, die Existenz eines Segmentes $\bar{I} \subset B$ mit

$$\iint_{\bar{I}} f(x, y) d\sigma > \int_{R(I)} P dx + Q dy \tag{100}$$

voraus. Dann gibt es eine in B perfekte Menge $S \neq 0$, deren Punkte in jeder Umgebung Segmente haben, für die (100) gilt. $\bar{U} \subset B$ enthalte im Innern Punkte von S; es sei $F = (\overline{U \cdot S})$.

In den Punkten von $F - E$ hat der Vektor $\vec{\mathfrak{V}}(x, y)$ die Eigenschaft K (siehe Satz D, 1°). Auf die hier betrachteten $\vec{\mathfrak{V}}$, F und $E = \sum_{p=1}^{\infty} E^{(p)}$ läßt sich in B Lemma 1 (§ 26) anwenden. Es gibt somit entweder ein System $T\,(\Pi;\, m_0, n_0)$, wobei Π ein Stück[18]) von F, mit $\Pi = (\overline{u \cdot F})$, Segment $\bar{u} \subset B$, und der zu (m_0, n_0) korrespondierenden Menge $F_{m_0, n_0} \subset \Pi$, oder es gibt ein in B enthaltenes Stück Π von F, welches zu einer der Mengen $E^{(p)}$ gehört.

Im ersten Fall lassen sich die Betrachtungen von §§ 28 bis 30 wiederholen, und wird in dieser Weise ein Widerspruch erhalten.

Auch im zweiten Fall sei Π bestimmt durch ein Intervall u, also $\Pi = (\overline{u \cdot F})$, und dabei $\Pi \subseteqq E^{(p_0)}$. Π hat somit endliches lineares Maß. Aus Segment $\bar{u}_0 \subset u$ und $u_0 \cdot \Pi \neq 0$ folgt, daß in genügend kleiner Umgebung eines Punktes von $u_0 - \Pi$ für jedes Segment $\bar{\imath}$ mit positiv orientiertem Rand $R(i)$

$$\Phi(\bar{\imath}) \equiv \int_{R(i)} P dx + Q dy \geqq \iint_{\bar{\imath}} f(x, y) d\sigma$$

ist. Da f bis auf eine Menge vom Maß Null nach unten beschränkt ist, folgt in jedem Punkte von $u_0 - \Pi$ $D^{-}\Phi \neq -\infty$, und in fast jedem Punkte von $u_0 - \Pi$ $D^{-}\Phi \geqq f(x, y)$. Nach dem ersten Hilfssatz von Teil I, § 7 (Satz von Besicovitch–Saks–Zygmund) folgt für jedes in u_0 liegende Segment $\bar{\imath}$

$$\Phi(\bar{\imath}) \geqq \iint_{\bar{\imath}} f d\sigma.$$

Dies widerspricht jedoch $u_0 \cdot \Pi \neq 0$.

§ 34. (Verallgemeinerter) Satz $(D^{\text{bis}})^*$. *Auch Satz D^* behält seine Gültigkeit unter den beiden Annahmen: α. die Funktionen $f^{(l)}(x, y)$ sind in B (Lebesgue-integrierbar und) nach unten beschränkt bei Vernachlässigung einer Teilmenge vom Maß Null $(l = 1, 2, \ldots, l_0)$; β. jede der Mengen E_l $(l = 1, 2, \ldots, l_0)$ ist allgemein eine Summe $\sum_{p=1}^{\infty} E_l^{(p)}$ mit jeder Menge $E_l^{(p)}$ von endlichem linearen Maß und abgeschlossen in B.*

Dieser Satz folgt sofort aus dem allgemeinen Theorem (II, § 8) und folgendem Hilfssatz $(10^{\text{bis}})^*$.

(Verallgemeinerter) Hilfssatz (10^{bis})*. Unter den Bedingungen von Satz (D^{bis})* ist für jedes in B liegende Segment $\bar{I}$, mit positiv orientiertem Rand $R(I)$,

$$\int\int_{\bar{I}} f^{(l)}(x, y)d\sigma \leqq \int_{R(I)} P^{(l)}dx + Q^{(l)}dy \qquad (l = 1, 2, \ldots, l_0). \tag{101}$$

Beweis. $S, \bar{I}, \bar{U}, F$ seien wie im Anfang des Beweises von Hilfssatz 10* (§ 31).

l_0-fach wiederholte Anwendung von Lemma 1 (§ 26) führt zu einem Stück $\Pi^{(l_0)}$ von F, bestimmt durch ein Segment $\bar{I}_{l_0} \subset U$, wobei $\Pi^{(l_0)}$ Teilmenge von $\bar{l}$ Mengen $E_l^{(p)}$ und von $l_0 - \bar{l}$ Mengen $\Pi^{(j)}$, mit zugehörigen Systemen $T(\Pi^{(j)}; m_0^{(j)}, n_0^{(j)})$ $(0 \leqq \bar{l} \leqq l_0)$.

Von nun an können wir für jeden Vektor $\vec{\mathfrak{V}}_l$, mit zugehörigem $f^{(l)}$ $(l = 1, 2, \ldots, l_0)$, und $\Pi^{(l_0)}$ entweder die Betrachtungen von §§ 28 bis 30 oder die im letzten Absatz des Beweises von Hilfssatz 10^{bis} (§ 33) wiederholen.

In beiden Fällen findet man für jedes Segment $\bar{I} \subset I_{l_0}$ (101) als erfüllt. Wir gelangen damit zu einem Widerspruch.

Ersetzt man in den zugehörigen Beweisen von § 32 die Anwendung der Sätze D^* und D durch die von Satz (D^{bis})* bzw. Satz D^{bis}, so läßt sich zeigen, *daß in den Folgerungen* 1, 1^a, 1^b, 2, 2^a, 3 *und* 3^a *die Ausnahmemenge E allgemeiner als eine Summe $\sum_{p=1}^{\infty} E^{(p)}$ angenommen werden darf mit jeder Menge $E^{(p)}$ von endlichem linearen Maß und abgeschlossen in B.*

§ 35. Anwendung eines Satzes von Brelot.

Satz. Die Annahmen seien entweder wie in Folgerung 3 oder wie im Spezialfall 3^a (§ 32) ausgenommen die Bedingung bezüglich der Menge E; *diese sei hier Summe von abzählbar vielen, in B abgeschlossenen Mengen $E^{(p)}$* $(p = 1, 2, \ldots)$ *deren jede* (und somit auch ihre Summe) *von der Kapazität Null sei.* Dann ist

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial y}\, dx - \frac{\partial u}{\partial x}\, dy \leqq 0,$$

und $u(x, y)$ subharmonisch in B.

Beweis. Dieser verläuft längs den gleichen Linien wie der von Satz D^{bis} (§ 33) mit dem Unterschiede, daß die Anwendung des ersten Hilfssatzes von Teil I, § 7 durch Anwendung von Hilfssatz 7 (Satz von Brelot) und Hilfssatz 8 (Teil III, § 15) ersetzt werden soll [58].

Schließlich liefert der Satz von Brelot auch ein Ergebnis für harmonische Funktionen. Unter Anwendung des Beweisverfahrens von Satz (D^{bis})* (§ 34) erhält man [77] den

Satz: Die Bedingungen seien entweder wie in Folgerung 2 oder wie im Spezialfall 2^a (§ 32) mit dem Unterschiede, *daß die Menge E hier Summe*

[77] Man wende dabei neben Lemma 1 (§ 26) auch den ersten Satz dieses. Par an.

von abzählbar vielen in B abgeschlossenen Mengen $E^{(p)}$ $(p=1, 2, \dots)$ von der Kapazität Null sei. Dann ist $u(x, y)$ harmonisch in B.

Vergleiche diesen Par. mit Teil V, § 25.

BIBLIOGRAPHIE (Schluß).

19. MEIER, K. E., Zum Satz von Looman–Menchoff. Comment. Math. Helv. **25**, 181–195 (1951).

20. ———, Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer komplexen Funktion. Comment. Math. Helv. **34**, 67–70 (1960).